

モンテカルロ実験による同時方程式モデルの 誤差項の共分散行列の推定に関する一考察

Note on the estimates for disturbance matrix of simultaneous
equation models by Monte Carlo simulation

松 田 忠 之
Matsuda, Tadayuki

ABSTRACT

The article considers the estimates for disturbance matrix of simultaneous equation models. The three-stage least squares method is a technique by using the two-stage least squares estimated moment matrix of the structural disturbances to estimate all coefficients of the entire system simultaneously. In order to obtain good estimates for the coefficients, an accurate estimate for disturbance matrix is required. But the estimate by the two-stage least squares method has serious bias particularly in small samples. An estimator for disturbance matrix is proposed and shown by Monte Carlo simulation that it performs very well in small samples.

1 序

計量経済分析で使われる同時方程式モデルは、関係式の同時的な相互作用によって決定される内生変数 (endogenous variables) と、モデルの外部から決定される外生変数 (exogenous variables) の関係を表すために利用される。これらの関係は経済的な意味づけを行うことによって、未知係数 (母数) と誤差項を含む連立方程式の形で表現される。このとき、母数は実際のデータを用いて推測され、正しく推測されたモデルは予測などの問題に利用できる。

同時方程式モデルの母数の推定には、2 段階最小 2 乗推定量や 3 段階最小 2 乗

推定量などが用いられる。とりわけよく利用される3段階最小2乗推定量は、標本数が十分多い場合に良い性質を持つことが知られている (Theil [4])。ところが、標本数がそれほど多くない場合の性質についてはほとんど議論されていないにもかかわらず、実際の経済モデルの推測にこれらの推定量が使われている。たとえば Zellner and Theil [5] は、クラインによるモデル I (Klein [3]) の推定を行うために、1921 年から 1941 年までの 21 期の年次データを使って、2 段階最小 2 乗推定量と 3 段階最小 2 乗推定量による母数の推定を行い、その標準偏差などを計算した。また Freedman and Peters [2] は、Berndt-Wood モデル [1] にブートストラップ (Bootstrap) 法を適用し、3 段階最小 2 乗推定量および予測値の標準偏差などの推測を行った。このモデルの標本数は 25 であり、それほど多くない。

3 段階最小 2 乗推定方式は、まず誤差項の共分散行列を 2 段階最小 2 乗推定値による残差を使って推定し、つぎに誤差項をその推定値に置き換えて、一般化最小 2 乗法から母数の推定を行う。したがって、精度の良い 3 段階最小 2 乗推定値を求めるために、誤差項の共分散行列の良い推定値が必要である。

本稿では、標本数が 20 から 30 位のそれほど多くない場合にも、誤差項の共分散行列に関して偏りが小さい推定方式を提案する。実際にその効果を確かめるために、2 つの内生変数を持つ同時方程式モデルに対してシミュレーション実験⁽¹⁾を行う。共分散行列の推定値を改善する通常の方法として反復推定を行う方法がある。しかし、反復推定する方法は共分散行列の推定値を過小評価 (underestimate) する。そこで、推定値をインフレートして改善する方法を紹介し、反復操作と組み合わせた推定方式についてシミュレーションを行い、インフレーション効果と反復効果について調べる。シミュレーション実験から、インフレートした推定量は反復操作を行わなくても偏りが小さい推定量となることがわかる。すなわち、2 段階最小 2 乗推定量を 1 回インフレートした推定量は標本数が多い

(1) シミュレーションの計算およびグラフ作成は GNU のフリーソフト R を用い、本学部経済計測研究所のコンピュータを利用して行った。

場合だけでなく、それほど多くない場合にも偏りが小さい推定量となり、これを反復推定してもほとんど改善できない。

2 節では、3 段階最小 2 乗推定方式による共分散行列を推定する方法を簡単に紹介する。3 節では、反復操作のための終了条件を定め、反復回数がモデルの識別性や標本数、誤差項の相関係数によってどのように影響を受けるか調べる。4 節はインフレートする方法を紹介し、インフレートして反復を行う推定方式の性質を調べ、通常反復推定方式と比較する。最後の 5 節では、マダラ [6] のテキストで紹介された実際のデータを使い、通常反復推定方式とインフレートした反復推定方式を用いて誤差項の共分散行列を推定する。この例の反復回数はシミュレーション結果とほぼ一致する。

2 誤差項の共分散行列の推定⁽²⁾

L 個の内生変数 y_1, \dots, y_L が L 個の方程式によって次のように表現される同時方程式モデルを考える。

$$y_i = Z_i \delta_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, L \quad (1)$$

この方程式体系の $i (1 \leq i \leq L)$ 番目の方程式において、 δ_i は N_i 個の未知母数からなるベクトル、そして ε_i は誤差項を表す。さらに Z_i は y_i 以外のいくつかの内生変数および外生変数を含む。

各変数について、 n 個の観測値が利用できると仮定する。このとき、変数 y_i の観測値を $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{in})'$ のように縦ベクトルで表す。

誤差項 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_L)$ の $t (1 \leq t \leq n)$ 番目の要素 $(\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}, \dots, \varepsilon_{tL})$ に対して、つぎの仮定を置く。

仮定 1 t に関して、 $(\varepsilon_{t1}, \dots, \varepsilon_{tL})$ は独立同一分布に従う。

仮定 2 すべての t に対して、 $(\varepsilon_{t1}, \dots, \varepsilon_{tL})$ の平均ベクトルは 0、また共分散行列は $L \times L$ 正値対称行列である。この共分散行列を $V = (V_{ij})$ で表す。

(1) 式の方程式体系に含まれるすべての外生変数から重複する変数を除き、残つ

(2) 詳しい内容については Theil [4], Chapter 10 を参照。

た K 個の外生変数を x_1, \dots, x_K で表す。さらに、すべての外生変数の n 個の観測値を並べた行列を

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1K} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nK} \end{pmatrix}$$

とおく。

まず、2段階最小2乗法の考え方について紹介する。 X の転置行列 X' を(1)式の両辺に掛ければ

$$X'y_i = X'Z_i\delta_i + X'\varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, L \quad (2)$$

となる。このとき、 i 番目の方程式の誤差項の平均ベクトルと共分散行列はそれぞれ次のようになる。

$$E(X'\varepsilon_i) = 0, \quad \text{Cov}(X'\varepsilon_i) = X'E(\varepsilon_i\varepsilon_i')X = V_{ii}(X'X)$$

共分散行列の中に現れる V_{ii} は未知であるが、 $X'X$ は既知であるから、各方程式に一般化最小2乗法が適用でき、 δ_i の2段階最小2乗推定量

$$\hat{\delta}_i^{(0)} = (Z_i'X(X'X)^{-1}X'Z_i)^{-1}Z_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \quad (3)$$

を得る。このとき V_{ii} は

$$S_{ii} = \frac{1}{n}(y_i - Z_i\hat{\delta}_i^{(0)})'(y_i - Z_i\hat{\delta}_i^{(0)})$$

によって推定できる (Theil [4], Theorem 10.3)。

2段階最小2乗法では、個々の方程式にそれぞれ一般化最小2乗法を適用した。ところが、3段階最小2乗法では、 L 個の方程式を同時に考えるために y_1, \dots, y_L を次のように積み重ねる。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & Z_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_L \end{pmatrix}$$

上記の方程式を簡単に

$$y = Z\delta + \varepsilon \quad (4)$$

と表す。

一般に、 $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $p \times q$ 行列 B に対して、 $mp \times nq$ 行列 $A \otimes B$ を

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}B \\ a_{21}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

によって定義する。この行列演算 \otimes はクロネッカー積と呼ばれる。

L 次の単位行列 I と X' のクロネッカー積

$$I \otimes X' = \begin{pmatrix} X' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X' & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & X' \end{pmatrix}$$

を(4)式の両辺に掛けると

$$(I \otimes X')y = (I \otimes X')Z\delta + (I \otimes X')\varepsilon$$

となる。またこの方程式は次のように表現することもできる。

$$\begin{pmatrix} X'y_1 \\ X'y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X'y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X'Z_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & X'Z_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X'\varepsilon_1 \\ X'\varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X'\varepsilon_L \end{pmatrix}$$

このとき、誤差項の共分散行列は $V \otimes (X'X)$ となる。したがって、母数 δ に対する一般化最小 2 乗推定量は

$$\tilde{\delta} = (Z'(V^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X')Z)^{-1}Z'(V^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X')y \quad (5)$$

である。2 段階最小 2 乗法では未知の V_{ii} がスカラーのため消去できたが、(5) 式では未知の共分散行列 V が残る。そこで、(3) 式で求めた 2 段階最小 2 乗推定量 $\hat{\delta}_i^{(0)}$ を用いて、 V の各要素 V_{ij} を

$$S_{ij}^{(0)} = \frac{1}{n} (y_i - Z_i \hat{\delta}_i^{(0)})' (y_j - Z_j \hat{\delta}_j^{(0)}) \quad (6)$$

によって推定する (Theil [4], Theorem 10.4)。結局、(5) 式の V の代わりに、その推定行列

$$S^{(0)} = (S_{ij}^{(0)})$$

を代入すれば、 δ の 3 段階最小 2 乗推定量

$$\hat{\delta}^{(1)} = (Z'(S^{(0)-1} \otimes X(X'X)^{-1}X')Z)^{-1}Z'(S^{(0)-1} \otimes X(X'X)^{-1}X')y \quad (7)$$

が得られる。

以上述べたように、3 段階最小 2 乗推定方式では、あらかじめ誤差項の共分散行列 V の推定が行われる。したがって V の良い推定値を求めることができれば δ の精度の良い推定値が得られる。

3 反復効果

3 段階最小 2 乗推定方式では、前節で紹介したとおり、誤差項の共分散行列 V の推定を 2 段階最小 2 乗推定量 $\hat{\delta}_i^{(0)}$ を利用して行う。ところが、2 段階最小 2 乗推定量より 3 段階最小 2 乗推定量の方が漸近的に有効であることを考慮すれば、少なくとも標本数が多い場合は、 $\hat{\delta}_i^{(0)}$ の代わりに母数 δ_i に対する 3 段階最小 2 乗推定量 $\hat{\delta}_i^{(1)}$ を利用の方が良い推定量が得られるはずである。そこで $\hat{\delta}_i^{(0)}$ から $S^{(0)}$ を計算したように、(6) 式の $\hat{\delta}_i^{(0)}$ の代わりに $\hat{\delta}_i^{(1)}$ を使って計算した V の推定量を $S^{(1)}$ とする。さらに、(7) 式の $S^{(0)}$ の代わりに $S^{(1)}$ を代入して求めた推定量を $\hat{\delta}^{(2)}$ とし、以下この操作を続けて、 $S^{(k)}$ が収束するまで繰り返せば V の良い推定量、したがって δ の良い推定量が得られる。この方法は反復 3 段階最小 2 乗法として知られている。

(1) 式の同時方程式モデルで i 番目の方程式を考える。このとき、全方程式の

外生変数の総数 K が未知母数の数 N_i より多い場合、方程式は過剰に識別される (over-identified) という。また N_i と等しい場合、丁度識別される (just-identified) という。同時方程式が矛盾なく解けるには、個々の方程式に対して上記のいずれかの識別条件が必要である。

反復効果をシミュレーション実験で確かめるために、2つの方程式からなる次の同時方程式モデルを考える。

$$\begin{cases} y_1 = a_1 y_2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \varepsilon_1 \\ y_2 = a_2 y_1 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

ここで、 y_1, y_2 は内生変数を表し、 x_1, x_2, x_3, x_4 は外生変数である。外見上、 $K = 4, N_1 = N_2 = 3$ であるが、係数 b_2 と b_4 を便宜的に 0 と考えることによって外生変数の数が減り、次の3つのタイプを含むようにできる。

モデル 1 : 2つとも過剰に識別される場合 ($b_i \neq 0, i = 1, \dots, 4$)

モデル 2 : それぞれ過剰と丁度識別される場合 ($b_2 = 0, b_i \neq 0, i = 1, 3, 4$)

モデル 3 : 2つとも丁度識別される場合 ($b_2 = b_4 = 0, b_i \neq 0, i = 1, 3$)

まずシミュレーションに必要な外生変数 x_1, x_2, x_3, x_4 をそれぞれ 200 個生成した。これらの平均、標準偏差、相関係数は下記の表 1 のとおりであり、お互いにはほとんど関連がない。

表 1 外生変数の統計量

変数	平均	標準偏差	相関係数			
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	22.548	4.210	1.000	0.101	-0.098	0.088
x_2	25.989	2.993		1.000	-0.055	0.076
x_3	23.371	13.711			1.000	0.170
x_4	33.496	9.617				1.000

つぎに 2 次元正規分布 $N(0, V)$ に従う独立な n 個の誤差項 ($\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$) を生成して、

$$(y_{t1}, y_{t2}) = ((x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}, x_{t4})B + (\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}))(I - A)^{-1}$$

ただし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$$

の関係式を利用して (y_{t1}, y_{t2}) を計算し, (3) 式から 2 段階最小 2 乗推定値を求める。さらにこの推定値を使って反復計算して V の推定値 $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(k+1)}$ を求め, 終了条件: $\max\{|S_{ij}^{(k)} - S_{ij}^{(k+1)}|; i, j = 1, 2\} < 0.001$ を満足するまで繰り返し, その反復回数 k を記録する。ここで, $V_{11} = V_{22} = 1$, $V_{12} = \rho$ と仮定し, ρ として $\pm 0.9, \pm 0.5, \pm 0.1$ の 6 つの値を考える。さらに標本数は 20, 30, 50, 100, 200 の 5 つの場合を考える。

上記のシミュレーションを 500 続けて行い, 反復回数の平均値をモデル 1 とモデル 2 の場合にそれぞれ表 2 と表 3 に示した。⁽³⁾

表 2 反復回数 (モデル 1)

n	$\rho = -0.9$	$\rho = -0.5$	$\rho = -0.1$	$\rho = 0.1$	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.9$
20	3.02	2.27	1.77	1.77	2.38	3.42
30	2.62	2.05	1.58	1.68	2.20	2.94
50	2.31	1.91	1.38	1.49	2.04	2.52
100	2.11	1.86	1.25	1.31	1.97	2.20
200	1.95	1.57	1.04	1.06	1.82	2.01

表 3 反復回数 (モデル 2)

n	$\rho = -0.9$	$\rho = -0.5$	$\rho = -0.1$	$\rho = 0.1$	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.9$
20	2.74	2.49	1.95	1.98	2.58	2.82
30	2.53	2.29	1.73	1.79	2.34	2.58
50	2.26	2.06	1.61	1.70	2.13	2.36
100	2.02	1.76	1.45	1.51	2.01	2.13
200	1.92	1.73	1.30	1.42	1.92	2.09

表 2 と表 3 から、平均的に 2, 3 回程度の反復計算を行えば終了条件を満足することがわかる。標本数との関係を調べると、一般に標本数が多くなると反復回数が減る。また相関係数とのかかわりで眺めると、 ρ の絶対値が 0 に近いほど反復回数が少なくなることがわかる。このことは、相関係数が 0 のとき、2 段階最小 2 乗推定量と 3 段階最小 2 乗推定量が一致することに起因する (Zellner and Theil [5])。したがって相関係数が 0 に近い場合、反復効果はほとんど期待できない。

さらに詳しく推定量の特性値を調べるために、500 個の $S^{(0)}$ の平均値を $\bar{S}^{(0)}$, $S^{(1)}$ の平均値を $\bar{S}^{(1)}$, ..., で表し、その平均値に対して同じ終了条件を満足するまで反復操作を繰り返す。付表 1-1 と付表 1-2 はそれぞれモデル 1 とモデル 2 におけるそれらの平均値 $\bar{S}^{(0)}$, $\bar{S}^{(1)}$, ..., $\bar{S}^{(k)}$ (表の上段の数字) および標準偏差 (下段の数字) を表す。反復回数は個別の場合の平均回数と比較して若干少なくなるが、標本数や相関係数との関係については同じ傾向がみられる。また当然のことながら、反復回数が増えるほど V に対する近似は良くなる。一般に標本数が多くなると反復回数が減り、推定値の近似度が良くなり、標準偏差も小さくなる。しかし、標本数が比較的少ない 20 や 30 の場合には、収束に必要な反復回数が多くなるにもかかわらずあまり良い推定値が得られない。また標準偏差も標本数の多い場合と比べてかなり大きい。

丁度識別される方程式が含まれるモデル 2 についてももう少し詳しく考察しよう。丁度識別される方程式の母数の推定値は過剰に識別される方程式の情報を使って改善できる。しかし、逆の関係は成立しないことが知られている (Zellner and Theil [5])。さらに詳しく述べると、3 段階最小 2 乗推定量 $\hat{\delta}^{(1)}$ を 1 番目の方程式の母数の推定量 $\hat{\delta}_1^{(1)}$ と 2 番目の方程式の母数の推定量 $\hat{\delta}_2^{(1)}$ に分けたとき、

$$\hat{\delta}_2^{(1)} = (X'Z_2)^{-1}X'y_2 - \frac{S_{12}}{S_{11}}(X'Z_2)^{-1}X'(y_1 - Z_1\hat{\delta}_1^{(1)})$$

- ㄨ (3) 母数は $b_1 = 0.5$, $b_2 = -1$, $b_3 = 0.7$, $b_4 = -0.8$, $b_5 = 1$, $b_6 = -1$ として計算した。なお、母数や誤差項の乱数を変えても、500 回の平均値で考えれば誤差項の推定値や反復回数はそれ程変化しない。

が成立する (Theil [4])。この式の右辺第 1 項は 2 段階最小 2 乗推定量 $\hat{\delta}_2^{(0)}$ と等しく、また右辺第 2 項は 1 番目の方程式の残差と S_{12}/S_{11} の値に関係する。ところで S_{12}/S_{11} は ρ の推定量と考えられるから、 ρ の絶対値が大きいほど第 2 項の絶対値も大きくなる。以上をまとめると、モデル 2 の V_{11} の推定値 S_{11} は改善できないが、 S_{12} と S_{22} は改善できる。さらに ρ の絶対値が大きいほど改善の度合いも大きい。

3 番目のモデル 3 では 2 つの方程式はいずれも丁度識別される。一般に、すべての方程式が丁度識別される場合は、2 段階最小 2 乗推定量と 3 段階最小 2 乗推定量が一致し (Zellner and Theil [5])、反復効果は期待できない。付表 1-3 では $\bar{S}^{(0)}$ を方法 S の欄の上段に示し、またその標準偏差を下段に示した。

最後に、すべてのシミュレーション実験の結果において、符号を考慮しなければ $\bar{S}^{(k)}$ は V を過小評価することを注意しておく。したがって δ の良い推定値を求めるには、何らかの方法で推定値の絶対値を大きくする必要がある。この問題は次節で取り扱う。

4 インフレーション効果

一般の線形回帰モデル

$$y = X\beta + \varepsilon$$

において、誤差項 ε の共分散行列が $\sigma^2 V$ (σ は未知、 V は既知) で与えられるとき、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-q} (y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta})$$

は σ^2 の不偏推定量となることが知られている。ここで $\hat{\beta}$ は一般化最小 2 乗推定量を表し、 q は母数 β の数 (次元) を表す。この考え方を同時方程式モデルにも適用し、 V_{ij} の推定量として

$$IS_{ij}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(n-N_i)(n-N_j)}} (y_i - Z_i \hat{\delta}_i^{(0)})' (y_j - Z_j \hat{\delta}_j^{(0)}) \quad (8)$$

を考え、その行列を

$$IS^{(0)} = (IS_{ij}^{(0)})$$

と定義する。ここで N_i は母数 δ_i の次元を表す。共分散行列 V_{ij} の推定値を求めるために、(6) 式では n で割り過小に推定されたが、ここでは $\sqrt{(n-N_i)(n-N_j)}$ で割ってインフレートする。すでに 2 節で述べたように、2 段階や 3 段階最小 2 乗推定法は標本数が多い場合の理論であり、 V の推定に関してこのようなインフレーション操作は行われない。

インフレートした後、さらに反復推定を行うために、 $S^{(0)}$ の代わりに $IS^{(0)}$ を (7) 式に代入して 3 段階最小 2 乗推定量 $\widehat{\delta}^{(1)}$ を求める。そして再び (8) 式の $\widehat{\delta}^{(0)}$ に $\widehat{\delta}^{(1)}$ を代入して計算した推定行列を $IS^{(1)}$ とする。

標本数が多い場合、 V の 2 つの推定量 $IS^{(0)}$ 、 $IS^{(1)}$ はインフレートしない k 回反復推定量 $S^{(k)}$ とほとんど同じ値をとると考えられる。しかし、標本数が 20 や 30 のように比較的少ない場合にはその性質が知られていない。そこで、上記の 3 つのモデルに対してシミュレーションを 500 回行い、インフレートした推定量 $IS^{(0)}$ 、 $IS^{(1)}$ を計算し、それらの平均値 $\overline{IS}^{(0)}$ 、 $\overline{IS}^{(1)}$ をそれぞれ付表 2-1、付表 2-2、付表 1-3 にまとめた。

モデル 1 とモデル 2 では、2 段階最小 2 乗推定量をインフレートした推定量 $IS^{(0)}$ は標本数や相関係数に関係なく偏りが非常に小さい推定量である。さらに、 $IS^{(0)}$ とそれを 1 回反復推定した $IS^{(1)}$ との差異はほとんど認められない。また、付表 1-1、1-2 で与えた通常の k 回反復推定量 $S^{(k)}$ との比較においても、 $IS^{(0)}$ の方が偏りが小さいことがわかる。もちろんこれらの結果はシミュレーション 500 回の平均値による比較である。

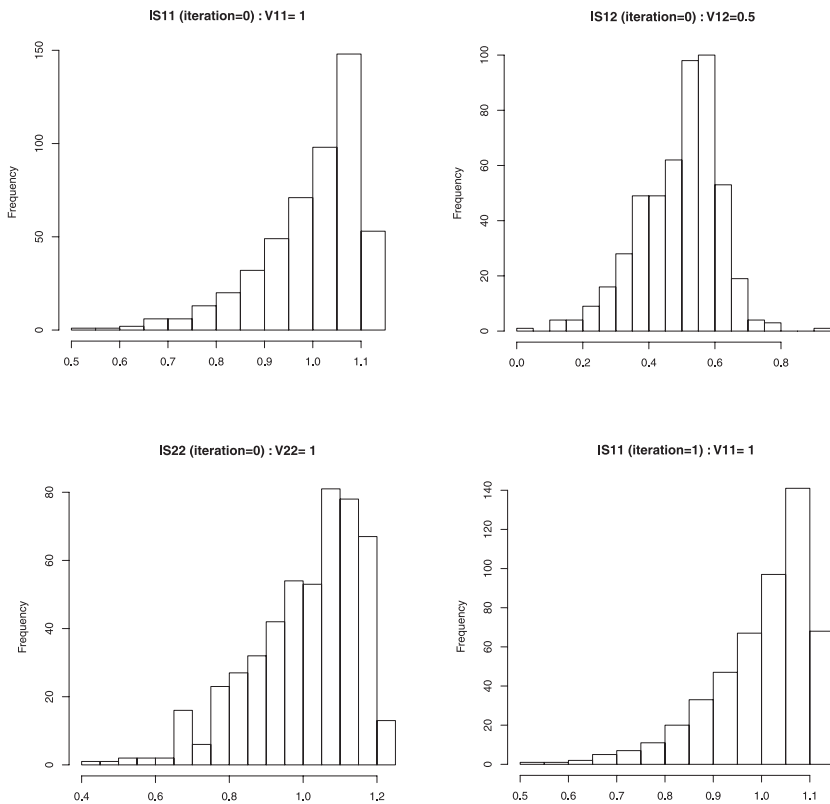
モデル 3 の場合は、反復効果が期待できないので、2 段階最小 2 乗推定量から推定される $IS^{(0)}$ のみを計算し、その平均値を付表 1-3 の方法 IS の欄に示した。すべての場合にインフレーションによる効果が大きく現れ、とくに $n = 20, 30$ のように標本数がそれほど多くない場合にも、偏りが非常に小さくなる。

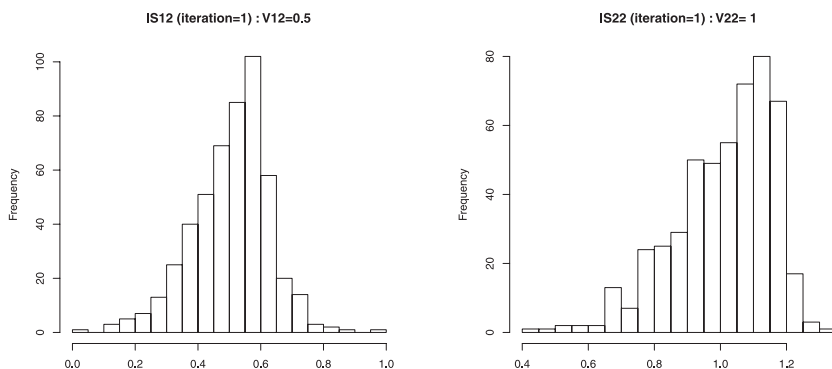
以上のシミュレーション結果から、標本数や相関係数にかかわらず、反復効果

よりインフレーション効果の方が大きく、インフレートのみを行った $IS^{(0)}$ が V の推定量として非常に良いことがわかる。

インフレートした推定量 $IS^{(0)}$ および $IS^{(1)}$ がどのように分布するか調べるために、 $n = 20$, $\rho = 0.5$ の場合にモデル 1 のシミュレーションを行い、500 個の推定値を求めそのヒストグラムを作成した。図 1 の $IS11$, $IS12$, $IS22$ はそれぞれ $V_{11} = 1$, $V_{12} = 0.5$, $V_{22} = 1$ の推定量 IS の 3 つの成分を表し、さらに反復回数 i は「iteration = i 」によって示した。

図 1 誤差項の共分散行列のヒストグラム





5 応用

この節では実際のデータの応用例として、マダラ [6] のテキストで取り上げられた 1979 年から 1984 年までのアメリカ商業銀行から企業への貸出のデータを使う。マダラが貸出市場を分析する際に使った需給モデルでは、企業の借入れ需要は

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 R_t + \beta_2 RD_t + \beta_3 X_t + \varepsilon_{t1}$$

であり、商業銀行の貸出供給は次の式なる⁽⁴⁾。

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 Q_t + \alpha_2 RS_t + \alpha_3 y_t + \varepsilon_{t2}$$

ここで

Q_t = 総貸出 (10 億ドル単位)

R_t = 銀行の平均的なプライムレート

RS_t = 3 ヶ月もの財務省証券のレート

RD_t = Aaa 格付け債権レート

X_t = 産業生産指数

(4) マダラは貸出供給の方程式を Q_t で基準化しているが、本稿の同時方程式モデルの書き方に合わせるため R_t で基準化した。

y_t = 総預金残高 (10 億ドル単位)

である。 Q_t と R_t は共に内生変数であり、他の変数はすべて外生変数である。したがって、この方程式は $K = 5$ (定数項を含む)、 $N_1 = N_2 = 4$ の場合であり、2本の方程式とも過剰識別される。誤差項の2つの分散 V_{11} , V_{22} に対する2段階最小2乗による推定値は、表4に示されているようにそれぞれ 906.789, 1.975 であった。そこで分散が共に1になるように内生変数を調整して、3節で述べた反復操作の終了条件を満足するように反復回数を求めたところ2回必要であった。このモデルは標本数 72, また相関係数は大体 0.46 であり、反復回数2回はモデル1のシミュレーション結果(表2)とほぼ一致する。そこで反復計算を3回行い、通常の方法による推定値 $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ とインフレートした推定値 $IS^{(0)}$, $IS^{(1)}$, $IS^{(2)}$, $IS^{(3)}$ を求め表4に示した。前節で得られた結果を参考にすれば、 $IS^{(2)}$ が共分散行列の良い推定値である。この推定値は $S^{(0)}$ や $S^{(2)}$ と比較して値が若干大きい。

表4 共分散の推定

反復回数	S_{11}	S_{12}	S_{22}	IS_{11}	IS_{12}	IS_{22}
0	906.789	19.407	1.975	960.130	20.549	2.091
1	909.777	21.113	2.901	963.294	22.355	3.071
2	907.455	21.015	3.018	960.835	22.252	3.195
3	907.263	20.994	3.016	960.632	22.229	3.194

一般に L 本の方程式の母数の個数がすべて等しく、 $N_1 = N_2 \cdots = N_L = N$ と仮定する。このとき、 $S^{(0)}$ と $IS^{(0)}$ の間に

$$IS^{(0)} = \frac{n}{n-N} S^{(0)}$$

が成立し、 $S^{(0)}$ から求めた $\hat{\delta}^{(1)}$ と $IS^{(0)}$ から求めた $\widehat{I\delta}^{(1)}$ は同じ値になる。この関係は $i(\geq 1)$ 回反復推定を行った $S^{(i)}$ と $IS^{(i)}$ についても成立し、 $\hat{\delta}^{(i+1)}$ と $\widehat{I\delta}^{(i+1)}$ は一致する。したがって、各方程式の母数の個数がすべて等しい同時方

程式モデルでは、母数の推定に関してインフレーションの効果は得られない。

この例も母数の推定に関してインフレーションの効果が期待できない。そこで通常の母数の推定値と参考のために 2 段階最小 2 乗推定値 $\hat{\delta}^{(0)}$ を表 5 に示した⁽⁵⁾。この結果から、 $\hat{\delta}^{(3)}$ と $\hat{\delta}^{(4)}$ の値はそれ程変わらず、 $S^{(2)}$ を使って推定した $\hat{\delta}^{(3)}$ を母数の推定値として採用できる。

表 5 母数の推定

推定量	β_0	β_1	β_2	β_3	α_0	α_1	α_2	α_3
$\hat{\delta}^{(0)}$	-210.512	-20.190	2.340	40.761	10.189	0.109	1.058	-0.037
$\hat{\delta}^{(1)}$	-252.463	-20.108	2.659	40.198	15.565	0.162	0.965	-0.055
$\hat{\delta}^{(2)}$	-240.929	-20.130	2.571	40.353	16.070	0.167	0.957	-0.057
$\hat{\delta}^{(3)}$	-239.621	-20.133	2.561	40.371	16.063	0.167	0.957	-0.057
$\hat{\delta}^{(4)}$	-239.612	-20.133	2.561	40.371	16.059	0.167	0.957	-0.057

参考文献

- [1] Berndt, E. L. and Wood, D. O. (1975). Technology, Prices, and the Derived Demand for Energy. *Review of Economics and Statistics* **57** 259–268.
- [2] Freedman, D. A. and Peters, S. C. (1984). Bootstrapping an econometric model: Some empirical results. *J. Business Econom. Statist* **2** 150–158.
- [3] Klein, L. R. (1950). *Economic Fluctuations in the United States*. Wiley, New York.
- [4] Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics*. Wiley, New York.
- [5] Zellner, A. and Theil, H. (1962). Three-stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations. *Econometrica* **30** 54–78.
- [6] G.S. マダラ (和合肇訳) (1996). 『計量経済分析の方法』第 2 版, シーエーピー出版.

(5) 2 段階最小 2 乗推定値についてはマダラの表 8.4 を参照。なお、母数 $\alpha_0 \sim \alpha_3$ の推定値は基準化が異なるため一致しない。

付表 1-1 共分散の推定 (モデル 1)

標本 數	反復 回数	$\rho = -0.9$			$\rho = -0.5$			$\rho = 0.1$		
		S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	0	0.8494	-0.7549	0.8472	0.8411	-0.4213	0.8499	0.8553	-0.0912	0.8552
		0.09	0.08	0.09	0.1	0.08	0.09	0.09	0.08	0.09
		0.8656	-0.7805	0.8626	0.8442	-0.4329	0.853	0.8555	-0.0937	0.8555
	1	0.09	0.08	0.09	0.1	0.08	0.09	0.09	0.08	0.09
		0.8708	-0.7869	0.8688	0.8446	-0.4341	0.8535			
		0.1	0.09	0.09	0.1	0.08	0.09			
3	0.8722	-0.7887	0.8706							
	0.1	0.09	0.09							
30	0	0.9027	-0.8043	0.8979	0.8968	-0.4429	0.8972	0.901	-0.0903	0.8983
		0.07	0.06	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07
		0.9135	-0.823	0.9096	0.899	-0.4506	0.8992	0.9011	-0.092	0.8983
	1	0.07	0.06	0.07	0.07	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07
		0.9156	-0.8258	0.9123						
		0.07	0.06	0.07						
2										
50	0	0.9393	-0.8418	0.9391	0.9443	-0.4682	0.9402	0.944	-0.0924	0.9427
		0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.04
		0.9462	-0.8531	0.9466	0.9454	-0.4724	0.9413			
	1	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04			
		0.9473	-0.8544	0.948						
		0.04	0.04	0.04						
2										
100	0	0.967	-0.8693	0.9684	0.9691	-0.483	0.9682	0.9708	-0.0991	0.9687
		0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03
		0.9704	-0.875	0.9719	0.9698	-0.4857	0.9689			
	1	0.03	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02			
		0.984	-0.8849	0.9842	0.9846	-0.4914	0.9847	0.9838	-0.0979	0.9849
		0.02	0.01	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.02	0.02
2	0.9857	-0.8875	0.9859							
	0.02	0.01	0.01							

[illegible]

付表 1-2 共分散の推定 (モデル 2)

標本数	反復回数	$\rho = -0.9$			$\rho = -0.5$			$\rho = -0.1$		
		S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	0	0.8962	-0.7653	0.852	0.8943	-0.4239	0.8489	0.9019	-0.0928	0.8534
		0.07	0.08	0.09	0.08	0.08	0.09	0.06	0.07	0.09
	1	0.8962	-0.8009	0.8794	0.8943	-0.4433	0.8581	0.9019	-0.0972	0.855
		0.07	0.07	0.08	0.08	0.08	0.1	0.06	0.08	0.09
	2	0.8962	-0.8057	0.8869	0.8943	-0.4458	0.8603			
		0.07	0.07	0.08	0.08	0.08	0.1			
30	0	0.8962	-0.8066	0.8885						
		0.07	0.07	0.08						
	1	0.9325	-0.8086	0.8984	0.9315	-0.4482	0.8999	0.9333	-0.0913	0.9008
		0.06	0.07	0.07	0.05	0.06	0.06	0.04	0.05	0.06
	2	0.9325	-0.8358	0.9199	0.9315	-0.4629	0.9068	0.9333	-0.0941	0.9012
		0.06	0.05	0.06	0.05	0.05	0.06	0.04	0.05	0.06
50	0	0.9325	-0.8387	0.9245	0.9315	-0.4646	0.9082			
		0.06	0.05	0.06	0.05	0.05	0.06			
	1	0.9599	-0.8453	0.9397	0.9613	-0.4692	0.94	0.9614	-0.0922	0.9426
		0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.04
	2	0.9599	-0.8626	0.9544	0.9613	-0.4787	0.9446	0.9614	-0.094	0.9429
		0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.04
100	0	0.9599	-0.8638	0.9564						
		0.04	0.03	0.03						
	1	0.9768	-0.8704	0.9679	0.9793	-0.4838	0.9675	0.9807	-0.0987	0.969
		0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	2	0.9768	-0.8788	0.9749	0.9793	-0.4889	0.9699			
		0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02			
200	0	0.9768	-0.8704	0.9679	0.9793	-0.4838	0.9675	0.9807	-0.0987	0.969
		0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	1	0.989	-0.8862	0.9852	0.9902	-0.4922	0.9849	0.989	-0.0988	0.9847
		0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	2	0.989	-0.8904	0.9889	0.9902	-0.4944	0.9861			
		0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01			

標本数	反復回数	$\rho = 0.1$			$\rho = 0.5$			$\rho = 0.9$		
		S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	0	0.8967	0.0875	0.8528	0.8974	0.4264	0.857	0.9038	0.7703	0.8589
		0.06	0.07	0.09	0.06	0.08	0.11	0.06	0.08	0.11
	1	0.8967	0.0916	0.8535	0.8974	0.4452	0.8628	0.9038	0.805	0.8807
		0.06	0.08	0.09	0.06	0.08	0.11	0.06	0.06	0.08
	2				0.8974	0.4484	0.8663	0.9038	0.8108	0.8901
					0.06	0.08	0.11	0.06	0.06	0.08
30	0							0.9038	0.812	0.8924
								0.06	0.06	0.08
	1	0.9296	0.092	0.8966	0.9356	0.4539	0.9039	0.9285	0.8064	0.899
		0.05	0.05	0.07	0.04	0.06	0.07	0.05	0.07	0.09
	2	0.9296	0.0947	0.8969	0.9356	0.4678	0.9098	0.9285	0.831	0.9153
		0.05	0.05	0.07	0.04	0.06	0.07	0.05	0.05	0.06
50	0				0.9356	0.4693	0.9116	0.9285	0.8339	0.9204
					0.04	0.06	0.08	0.05	0.05	0.06
	1	0.961	0.0976	0.9426	0.9585	0.4692	0.9377	0.9578	0.8436	0.9365
		0.03	0.03	0.04	0.03	0.04	0.05	0.03	0.05	0.06
	2	0.961	0.0996	0.9427	0.9585	0.4769	0.9402	0.9578	0.8596	0.9505
		0.03	0.04	0.05	0.03	0.03	0.05	0.03	0.03	0.04
100	0							0.9578	0.861	0.9531
								0.03	0.03	0.04
	1	0.9795	0.0966	0.9678	0.9804	0.4854	0.9701	0.9791	0.8743	0.9722
		0.02	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03	0.02	0.03	0.04
	2				0.9804	0.4904	0.9724	0.9791	0.8815	0.978
					0.01	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02
200	0									
	1	0.9902	0.0986	0.9842	0.99	0.4932	0.9859	0.9903	0.887	0.9862
		0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.03
	2				0.99	0.4954	0.9869	0.9903	0.8908	0.9884
					0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01

付表 1-3 共分散の推定 (モデル 3)

標本数	方法	反復回数	$\rho=-0.9$			$\rho=-0.5$			$\rho=-0.1$		
			S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	S	0	0.903	-0.811	0.901	0.9	-0.448	0.899	0.901	-0.097	0.903
			0.09	0.06	0.06	0.08	0.06	0.07	0.07	0.06	0.06
	IS	0	1.003	-0.901	1.001	1	-0.498	0.999	1.001	-0.108	1.003
30	S	0	0.932	-0.838	0.932	0.932	-0.465	0.934	0.936	-0.095	0.934
			0.07	0.05	0.05	0.06	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04
	IS	0	0.999	-0.898	0.999	0.999	-0.499	1.001	1.003	-0.101	1.001
50	S	0	0.962	-0.865	0.96	0.96	-0.479	0.96	0.962	-0.095	0.962
			0.04	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
	IS	0	1.002	-0.901	1	1	-0.499	1	1.002	-0.099	1.002
100	S	0	0.978	-0.881	0.98	0.98	-0.489	0.978	0.98	-0.099	0.979
			0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	IS	0	0.998	-0.899	1	1	-0.499	0.998	1	-0.101	0.999
200	S	0	0.99	-0.891	0.991	0.99	-0.494	0.99	0.989	-0.099	0.99
			0.02	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	IS	0	1	-0.9	1.001	1	-0.499	1	0.999	-0.1	1

標本数	方法	反復回数	$\rho=0.1$			$\rho=0.5$			$\rho=0.9$		
			S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	S	0	0.901	0.091	0.9	0.902	0.45	0.9	0.902	0.811	0.904
			0.06	0.06	0.07	0.06	0.07	0.09	0.06	0.07	0.09
	IS	0	1.001	0.101	1.001	1.002	0.5	1.001	1.002	0.902	1.004
30	S	0	0.935	0.097	0.931	0.934	0.467	0.934	0.932	0.839	0.934
			0.05	0.04	0.05	0.04	0.05	0.06	0.04	0.05	0.07
	IS	0	1.001	0.104	0.997	1.001	0.501	1.001	0.998	0.899	1.001
50	S	0	0.959	0.099	0.962	0.961	0.481	0.962	0.961	0.863	0.959
			0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.04	0.05
	IS	0	0.999	0.103	1.002	1.001	0.502	1.002	1.001	0.899	0.999
100	S	0	0.979	0.097	0.979	0.98	0.49	0.979	0.981	0.884	0.984
			0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02	0.03
	IS	0	0.999	0.099	0.999	1	0.5	0.999	1.001	0.902	1.004
200	S	0	0.99	0.099	0.989	0.99	0.496	0.991	0.99	0.892	0.991
			0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.03
	IS	0	1	0.1	0.999	1	0.501	1.001	1	0.901	1.001

付表 2-1 共分散の推定 (モデル 1 に対するインフレーション効果)

標本数	反復回数	$\rho = -0.9$			$\rho = -0.5$			$\rho = -0.1$		
		S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	0	0.999	-0.888	0.997	0.99	-0.496	1	1.006	-0.107	1.006
	1	1.018	-0.918	1.015	0.993	-0.509	1.003	1.006	-0.11	1.007
30	0	1.003	-0.894	0.998	0.996	-0.492	0.997	1.001	-0.1	0.998
	1	1.015	-0.914	1.011	0.999	-0.501	0.999	1.001	-0.102	0.998
50	0	0.999	-0.895	0.999	1.005	-0.498	1	1.004	-0.098	1.003
	1	1.007	-0.908	1.007	1.006	-0.503	1.001	1.004	-0.099	1.003
100	0	0.997	-0.896	0.998	0.999	-0.498	0.998	1.001	-0.102	0.999
	1	1	-0.902	1.002	1	-0.501	0.999	1.001	-0.103	0.999
200	0	0.999	-0.898	0.999	1	-0.499	1	0.999	-0.099	1
	1	1.001	-0.901	1.001	1	-0.5	1	0.999	-0.1	1

標本数	反復回数	$\rho = 0.1$			$\rho = 0.5$			$\rho = 0.9$		
		S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	0	1.002	0.103	1.003	0.998	0.497	1.012	1.012	0.896	1.006
	1	1.003	0.106	1.003	1.002	0.51	1.016	1.03	0.924	1.018
30	0	0.999	0.1	0.998	1.006	0.499	1.003	0.998	0.888	0.996
	1	0.999	0.102	0.999	1.009	0.508	1.005	1.01	0.908	1.004
50	0	1	0.104	1.004	1.002	0.498	0.999	0.999	0.893	0.995
	1	1	0.105	1.004	1.003	0.503	1	1.006	0.905	1.003
100	0	0.999	0.099	0.996	1.001	0.499	1	1	0.899	1.001
	1	0.999	0.1	0.996	1.002	0.502	1.001	1.004	0.905	1.005
200	0	1.001	0.099	0.998	1	0.5	1.001	1	0.9	1.001
	1	1.001	0.099	0.998	1.001	0.501	1.002	1.002	0.902	1.002

付表 2-2 共分散の推定 (モデル 2 に対するインフレーション効果)

標本数	反復回数	$\rho = -0.9$			$\rho = -0.5$			$\rho = -0.1$		
		S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	0	0.996	-0.875	1.002	0.994	-0.485	0.999	1.002	-0.106	1.004
	1	0.996	-0.917	1.036	0.994	-0.507	1.01	1.002	-0.111	1.006
30	0	0.999	-0.882	0.998	0.998	-0.489	1	1	-0.1	1.001
	1	0.999	-0.913	1.023	0.998	-0.505	1.008	1	-0.103	1.001
50	0	1	-0.89	1	1.001	-0.494	1	1.001	-0.097	1.003
	1	1	-0.908	1.016	1.001	-0.504	1.005	1.001	-0.099	1.003
100	0	0.997	-0.893	0.998	0.999	-0.496	0.997	1.001	-0.101	0.999
	1	0.997	-0.901	1.005	0.999	-0.502	1	1.001	-0.102	0.999
200	0	0.999	-0.897	1	1	-0.498	1	0.999	-0.1	1
	1	0.999	-0.902	1.004	1	-0.501	1.001	0.999	-0.101	1

標本数	反復回数	$\rho = 0.1$			$\rho = 0.5$			$\rho = 0.9$		
		S11	S12	S22	S11	S12	S22	S11	S12	S22
20	0	0.996	0.1	1.003	0.997	0.487	1.008	1.004	0.881	1.011
	1	0.996	0.105	1.004	0.997	0.51	1.016	1.004	0.922	1.038
30	0	0.996	0.1	0.996	1.002	0.495	1.004	0.995	0.88	0.999
	1	0.996	0.103	0.997	1.002	0.511	1.011	0.995	0.907	1.018
50	0	1.001	0.103	1.003	0.998	0.494	0.998	0.998	0.888	0.996
	1	1.001	0.105	1.003	0.998	0.502	1	0.998	0.905	1.011
100	0	1	0.099	0.998	1	0.498	1	0.999	0.897	1.002
	1	1	0.1	0.998	1	0.503	1.003	0.999	0.904	1.008
200	0	1	0.1	0.999	1	0.499	1.001	1	0.898	1.001
	1	1	0.1	0.999	1	0.502	1.002	1	0.902	1.004